TITLE:

Variation of Cohomology in an Algebraic Family (代数解析学の最近の展開)

AUTHOR(S):

HARTSHORNE, ROBIN

CITATION:

HARTSHORNE, ROBIN. Variation of Cohomology in an Algebraic Family (代数解析学の最近の展開). 数理解析研究所講究録 1974, 201: 197-202

ISSUE DATE:

1974-02

URL:

http://hdl.handle.net/2433/105096

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
201巻 1974年 197-202
6月8日

佐藤さんの研究集会の講義

"Variation of cohomology in an algebraic family".

by Robin Hartshorne

§0 Introduction

次の一般の問題を考えます。

$\{X_t\}_{t\in T}$, T open $\subseteq \mathbb{C}$ を complex analytic space の analytic family として、
$t\in T$ に対して、$H^i(X_t,\mathbb{C})$ を考えて、
どの様に $H^i(X_t,\mathbb{C})$ は t に depend するか という問題を考えます。

① 例えば、f が smooth, proper のとき、
すなわち、$\forall t\in T$, X_t compact complex manifold, X manifold, f proper. で、
family $f: X\to T$ は differentiable family として locally trivial なことすぐ分かります。だから、
$|t-t'| < \epsilon$, $\exists$ isomorphism $X_t \cong X_{t'}$, differentiable manifold として、しかも、$H^i(X_t,\mathbb{C})$ は X_t の topological space だけできまるから、

$$H^i(X_t,\mathbb{C}) \cong H^i(X_{t'},\mathbb{C})$$ なります。

X = total space
$\downarrow f$
T
$f^{-1}(t) = X_t$.

Thm: $f: X\to T$ smooth, proper (T connected) $\Rightarrow$
function $t \longmapsto \dim H^i(X_t,\mathbb{C})$ is constant.

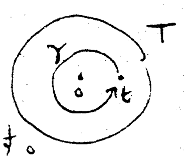
② もっと面白い場合は $T=$ disc $\{|z|<1\}$ として、
$f: X\to T$ proper morphism, $f: X-X_0 \to T-\{0\}$ smooth, X_0 singular points を持つ場合です。

$X_0 \subseteq X$
$\downarrow \quad \downarrow f$
$0 \in T$

$t\in T-\{0\}$ なら、$H^i(X_t,\mathbb{C})$ locally constant だから、path γ に対して、automorphism

$$\varphi: H^i(X_t,\mathbb{C}) \longrightarrow H^i(X_t,\mathbb{C})$$

があります。それを "monodromy transformation と呼びます。



それから T contractible ですから、X_0 は X の retraction です。
したがって、$H^i(X,\mathbb{C}) \xrightarrow{\cong} H^i(X_0,\mathbb{C})$ isomorphism です。

なお，$X_t \longrightarrow X$ の injection に対して，$H^i(X) \to H^i(X_t)$ の mapping があります から，自然な mapping

$$\alpha^i : H^i(X_0, \mathbb{C}) \longrightarrow H^i(X_t, \mathbb{C})$$

を得ります。Image α^i は，$H^i(X_t, \mathbb{C})$ の invariant cocycles（ξ invariant $\Leftrightarrow \varphi\xi = \xi$）に含まれていますから，

$$\boxed{\alpha^i : H^i(X_0, \mathbb{C}) \longrightarrow H^i(X_t, \mathbb{C})^{\varphi} = \text{invariant cocycles.}}$$

という mapping があります。

そのように，X_0 と X_t の cohomology との関係は研究されます。

③ Differential equations との関係もあります。$T - \{0\}$ 上に，sheaf $F^i = R^i f_*(\mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_T$ を考えて，これは locally free coherent sheaf で，自然な (integrable) connection ∇ を持っています。

(Integrable) connection とは，$F \xrightarrow{\nabla} F \otimes \Omega^1$ という mapping で，

〃 $\nabla(sf) = s\nabla f + f \otimes ds$

〃 $F \xrightarrow{\nabla} F \otimes \Omega^1 \xrightarrow{\nabla'} F \otimes \Omega^2$ で，$\nabla' \circ \nabla = 0$.（$T = \dim 1$ から，いつもそうです）.

Local に，$F \cong \mathcal{O}_T^r$，∇ は $\mathcal{O}_T^r \longrightarrow (\Omega_T^1)^r$ ですから，

$$\nabla = d + \omega, \quad \omega = (\omega_{ij}). \quad \omega_{ij} \in \Omega^1. = g_{ij} dz.$$

だから，differential equations

$$df_i + \sum_{j=1}^{r} g_{ij} f_j \, dz = 0 \qquad i = 1, \ldots r$$

を考えます。これを Picard-Fuchs equation と呼びます。

そうしたら，前の monodromy は，この DE の monodromy です。

今日は，このことを algebraic geometry の点で研究したいんです。
目的は，algebraic family $f: X \to T$ に対して，

1) $H^i(X_t, \mathbb{C})$ を代数的で定義する
2) monodromy と mapping α を代数的定義する，
3) f についての hypotheses を一般化する

（f smooth proper の代りに，f は morphism of schemes とします。だから，X_t は singularities を持ってもいいですし，X_t non-proper でもいいです。）

4) monodromy は trivial かつ α は isom なるような条件を述べる。

§1 Algebraic の場合の cohomology の定義.

k. 体. char. 0.

Y k-上の scheme (finite type) non-proper singular でもよい。

$Y \underset{\text{closed}}{\hookrightarrow} X$. X smooth $/k$.

$$\Omega^\cdot_X = \mathcal{O}_X \xrightarrow{d} \Omega^1_X \to \cdots \to \Omega^n_X.$$ differential forms の sheaf の complex.

$\hat{\Omega}^\cdot_X$: $\Omega^\cdot_X$ の Y に沿っての formal completion.

（X の sheaf F に対して，formal completion $\hat{F} = \varprojlim F/I_Y^\nu F$ で定義します。）

そうしたら，

$$H^i_{DR}(Y) = H^i(\hat{X}, \hat{\Omega}^\cdot_X)$$ という定義します.

Y の <u>algebraic De Rham cohomology</u> を呼びます. （X の取り方によりません。）

<u>Thm 1.</u> $H^i_{DR}(Y)$ fin. dim. k-vectorspace $\forall i$.

<u>Thm 2</u> $k = \mathbb{C}$ なら,

$$H^i_{DR}(Y) \cong H^i(Y^h, \mathbb{C}).$$

同様に，$f: Y \longrightarrow T$ family として，
$Y \hookrightarrow X$，T-上の smooth scheme で，

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dd, "/\text{smooth}"] \\ Y \arrow[ur, hook] \arrow[d] & \\ T & \end{tikzcd}$$

$\Omega^{\cdot}_{X/T}$ relative differentials の sheaf の complex，
$\hat{\Omega}^{\cdot}_{X/T}$，$Y$ に沿っての formal completion，

$$R^i_{DR} f_*(Y) = R^i f_*(\hat{X}, \hat{\Omega}^{\cdot}_{X/T})$$ という定義します。

<u>sheaf of relative De Rham cohomology</u> を呼びます。

absolute の場合に，$H^i(Y)$ fin dim. ですが，relative の場合に coherent 必ずしもありません。quasi-coherent さえありません。

けれども，

<u>Thm 3</u>. $\exists$ (Zariski) open dense subset $U \subseteq T$ such that $R^i_{DR} f_*(Y)$ is coherent and locally free on U, for all i.

<u>Thm 4</u>. $k = \mathbb{C}$ なら，$\exists$ open dense subset $U \subseteq T$ such that

$$R^i_{DR} f_*(Y)^h \cong R^i f^h_*(Y^h, \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}^h_T .$$

§2 <u>Monodromy + relation with cohomology of fibre</u>

今から，T smooth，dim 1 とします。

$$\begin{array}{c} Y \\ \downarrow f \\ T \\ | \\ k \end{array}$$

<u>Thm 5</u>: $R^i_{DR} f_*(Y)$ は canonical integrable connection ∇ を持っています。

Katz と小田で construct されています，f smooth の場合で，一般の場合で同じ方法を使います。

analytic の場合 に coherent sheaf の int. connection は いつも locally trivial ですが、 algebraic の場合に、 Zariski topology 弱いですから、そんなことは成り立ちません。

だから、 complete local ring を使って、強い localization をします。

そうしたら、

$$R^if_*(Y)_{\tau'} = H^i_{DR}(Y'_{\tau'})/K$$

$$\begin{array}{ccc} Y' & & Y \\ \downarrow & & \downarrow f \\ t_0\ \tau' \in T' & \longrightarrow & T \end{array}$$

τ': generic point

$T' = \mathrm{Spec}\, \hat{\mathcal{O}}_{t,T} = \mathrm{Spec}\, k[[t]] \subseteq K = k((t))$

τ' は generic point で、 $H^i(Y'_{\tau'})$ generic fibre の cohomology を得ります。 $K=k((t))$ 上の vectorspace です。

K上の vectorspace $H^i(Y'_{\tau'})$ とその connection ∇ で、 t の近傍の monodromy を表わします。

$H^i(Y'_{\tau'})^{\nabla}$ は horizontal sections として、 k-上の finite dim vectorspace です。 "invariant cocycles".

Thm 6 : $f: Y \to T$ proper morphism で、 $t_0 \in T$. $T' = \mathrm{Spec}\, \hat{\mathcal{O}}_{t_0,T}$. τ' generic point. $\Rightarrow$ 自然な mapping

(α^i を定義するのに f proper いります。)

$$\alpha^i : H^i(Y_{t_0}) \longrightarrow H^i(Y'_{\tau'})^{\nabla}$$

があります。

しかも、 integer r に対して、 $R^if'(Y')$ は coherent $\forall i \le r$ と仮定すると、

$\Rightarrow \forall i \le r$, 1) $\nabla : H^i(Y'_{\tau'})$ は trivial.

2) α^i isomorphism.

Cor 7 : $f: X \to T$ morphism of schemes. $k = \mathbb{C}$. $\exists$ U open dense Zariski subset s.t. $\forall t \in T$,

$$t \longmapsto \dim H^i(X^h_t, \mathbb{C}) \quad \text{constant}.$$

Problems ① "Griffiths' Conjecture"
α^i surjective でしょうか。
(Deligne によって 証明あるそうですが，複雑ですし，analytic と思います．だから，簡単な代数的な証明いります。)

② semi-continuity.
H^0 について，$\dim H^0(X_0) \leq \dim H^0(X_t)$ いつもそうです，"connectedness principle" ゆえで．
H^i について，$i>0$，ある semi-continuity 成り立つが。
(X は適当な条件をみたすとき)

Reference: "Algebraic De Rham Cohomology"
to appear, manuscripta math.